

KAJIAN ANALISIS GAYA GESEK FLUIDA VISKOS PADA PIPA KAPILER MENGGUNAKAN FORMULASI LAGRANGIAN DAN FUNGSI DISIPASI RAYLEIGH

¹Indra Purnomo, ²Farel Gilang Pratama, ³Muhammad I'zaz Raya,
⁴Fakhri Fajar Zein, ⁵Basir Ali Rahmatuloh

¹⁻⁵Program Studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember
¹251810201022@mail.unej.ac.id, ²251810201065@mail.unej.ac.id,
³251810201033@mail.unej.ac.id, ⁴251810201006@mail.unej.ac.id,
⁵251810201010@mail.unej.ac.id

ABSTRAK

Aliran fluida viskos dalam pipa kapiler melibatkan gaya gesek internal yang menyebabkan disipasi energi mekanik dan memengaruhi distribusi kecepatan fluida. Analisis gaya gesek pada skala kapiler umumnya menggunakan pendekatan mekanika fluida berbasis persamaan momentum, sedangkan pendekatan mekanika analitis berbasis energi masih relatif terbatas. Penelitian ini bertujuan merumuskan gaya gesek fluida viskos pada pipa kapiler menggunakan Persamaan Euler-Lagrange yang dilengkapi fungsi disipasi Rayleigh serta memperoleh profil kecepatan aliran secara analitis. Penelitian menggunakan desain analitis-teoretis dengan pendekatan kuantitatif berbasis pemodelan matematis. Model dibangun dengan asumsi fluida Newtonian, inkompresibel, laminar, mantap, dan berkembang penuh dalam pipa silinder. Fungsi Lagrangian dan fungsi disipasi Rayleigh disusun, kemudian disubstitusikan ke dalam Persamaan Euler-Lagrange tergeneralisasi untuk memperoleh persamaan aliran dan solusi profil kecepatan. Hasil pemodelan menunjukkan profil kecepatan berbentuk parabola dengan kecepatan maksimum di pusat pipa dan mendekati nol pada dinding. Distribusi tegangan geser meningkat secara linier dari pusat menuju dinding. Hasil tersebut menunjukkan kesesuaian dengan teori Navier-Stokes/Hagen-Poiseuille, sehingga pendekatan Lagrangian-Rayleigh dapat merepresentasikan gaya gesek dan disipasi energi pada aliran fluida viskos secara konsisten. Penelitian ini memberikan kerangka analitis berbasis energi untuk memahami dinamika aliran viskos pada pipa kapiler.

Kata kunci: Fluida newtonian, aliran Poiseuille, mekanika analitis, disipasi energi, tegangan geser, aliran laminar, mikrofluida.

ABSTRACT

Viscous fluid flow in capillary tubes involves internal frictional forces that cause mechanical energy dissipation and influence fluid velocity distribution. While frictional analysis at the capillary scale typically relies on momentum-based fluid mechanics approaches, energy-based analytical mechanics frameworks remain relatively limited. This study aims to formulate the frictional force of a viscous fluid in a capillary tube using the Euler-Lagrange equations coupled with the Rayleigh Dissipation Function, as well as to analytically derive the flow velocity profile. A theoretical-analytical design was employed using a

Article History

Received: Juli 2026

Reviewed: Juli 2026

Published: Juli 2026

Plagirism Checker:

No 234.GT8.,35

.800

Copyright : Author

Publishby :
Trigonometri



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

quantitative approach grounded in mathematical modeling. The model was constructed under the assumptions of a Newtonian, incompressible, laminar, steady, and fully developed fluid flow within a cylindrical pipe. The Lagrangian function and the Rayleigh Dissipation Function were formulated and substituted into the generalized Euler-Lagrange equation to obtain the governing flow equation and the velocity profile solution. The modeling results show a parabolic velocity profile with a maximum velocity at the pipe centerline and zero velocity at the wall. Furthermore, the shear stress distribution increases linearly from the center toward the wall. These findings demonstrate excellent agreement with Navier-Stokes/Hagen-Poiseuille theory, confirming that the Lagrangian-Rayleigh approach can consistently represent frictional forces and energy dissipation in viscous fluid flows. This study provides an energy-based analytical framework for understanding viscous flow dynamics in capillary tubes.

Keywords: *Newtonian fluid, Poiseuille flow, analytical mechanics, energy dissipation, shear stress, laminar flow, microfluidics.*

Pendahuluan

Aliran fluida viskos di dalam pipa kapiler merupakan fenomena yang banyak dijumpai pada berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Dalam bidang biomedis, misalnya, mekanisme aliran darah pada pembuluh kapiler sangat dipengaruhi oleh sifat viskositas darah sehingga berperan penting dalam proses transportasi oksigen dan nutrisi ke jaringan tubuh. Prinsip aliran kapiler dimanfaatkan pada sistem mikro fluida (*microfluidics*), perangkat *lab-on-a-chip*, sistem pelumasan presisi, serta berbagai instrumen pengukuran viskositas yang menggunakan volume sampel dalam jumlah sangat kecil [1]-[4]. Seiring berkembangnya teknologi mikro fluida, berbagai perangkat pengukur viskositas berbasis kapiler juga terus dikembangkan karena mampu memberikan pengukuran yang cepat, akurat, dan efisien dengan kebutuhan sampel yang minimal [3], [5]. Meskipun demikian, seluruh aplikasi tersebut memiliki karakteristik yang sama, yaitu adanya interaksi antar lapisan fluida yang menimbulkan tegangan geser sebagai akibat dari viskositas. Tegangan geser tersebut menghasilkan gaya gesek internal yang menghambat pergerakan fluida sehingga sebagian energi mekanik selama proses aliran berubah menjadi energi termal melalui mekanisme disipasi viskos. Pemahaman mengenai hubungan antara viskositas, gaya gesek, distribusi kecepatan, dan disipasi energi menjadi salah satu aspek fundamental dalam analisis aliran fluida pada geometri kapiler.

Proses pengukuran maupun analisis gaya gesek pada skala kapiler masih menghadapi berbagai tantangan. Pengukuran distribusi kecepatan maupun gaya gesek secara langsung di dalam saluran kapiler relatif sulit dilakukan karena dimensi saluran yang sangat kecil menyebabkan keberadaan sensor pengukuran berpotensi mengubah pola aliran yang sedang diamati. Kondisi tersebut mendorong berkembangnya berbagai teknik pengukuran tidak langsung, seperti *microfluidic viscometer*, sensor optik, maupun sistem berbasis tekanan diferensial untuk mengestimasi karakteristik viskositas fluida [3]-[7]. Di sisi lain, pendekatan teoritis yang umum digunakan masih didasarkan pada persamaan Navier-Stokes yang diperoleh dari keseimbangan

gaya menurut mekanika Newton. Meskipun pendekatan tersebut telah terbukti mampu menjelaskan karakteristik aliran fluida newtonian, proses penurunan persamaan untuk geometri silinder memerlukan penanganan komponen tegangan dan gradien kecepatan dalam koordinat radial, azimuthal, dan aksial yang relatif kompleks. Kompleksitas tersebut semakin meningkat ketika analisis diarahkan untuk menjelaskan hubungan antara gaya gesek, kehilangan energi, dan distribusi kecepatan dalam satu kerangka matematis yang terpadu. Sementara itu, formulasi mekanika analitis berbasis Lagrangian menawarkan keunggulan karena mampu membangun persamaan gerak melalui pendekatan energi dan koordinat tergeneralisasi. Formulasi Lagrangian konvensional hanya berlaku untuk sistem konservatif sehingga belum dapat merepresentasikan pengaruh gaya gesek viskos secara langsung.

Salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk mengatasi keterbatasan tersebut adalah memasukkan fungsi disipasi Rayleigh (*Rayleigh Dissipation Function*) ke dalam formulasi Lagrangian. Fungsi disipasi Rayleigh diperkenalkan sebagai representasi matematis dari laju hilangnya energi mekanik akibat adanya gaya non-konservatif, termasuk gaya gesek yang ditimbulkan oleh viskositas fluida. Persamaan Euler-Lagrange dapat diperluas sehingga mampu mengakomodasi sistem yang mengalami kehilangan energi selama proses geraknya [8]. Persamaan Euler-Lagrange tergeneralisasi yang melibatkan fungsi disipasi Rayleigh diperoleh melalui pengembangan mekanika analitis berdasarkan hukum II Newton dan prinsip D'Alembert untuk sistem yang dipengaruhi oleh gaya non-konservatif. Dalam formulasi Lagrangian, seluruh gaya konservatif dinyatakan melalui fungsi Lagrangian,

$$L = T - V \quad \text{.....(1)}$$

dengan T menyatakan energi kinetik dan V menyatakan energi potensial sistem. Untuk sistem yang hanya dipengaruhi oleh gaya konservatif, persamaan geraknya diperoleh langsung dari Persamaan Euler-Lagrange. Namun, pada sistem yang mengalami gaya non-konservatif, seperti gaya gesek viskos, pengaruh gaya tersebut tidak dapat direpresentasikan secara langsung oleh fungsi Lagrangian sehingga perlu dimasukkan sebagai gaya tergeneralisasi $Q_i^{(nc)}$. Persamaan Euler-Lagrange dituliskan sebagai

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^{(nc)} \quad \text{.....(2)}$$

dengan $Q_i^{(nc)}$ menyatakan gaya tergeneralisasi non-konservatif yang bekerja pada koordinat tergeneralisasi q_i .

Kasus gaya gesek viskos yang besarnya berbanding lurus terhadap kecepatan, Rayleigh memperkenalkan fungsi disipasi Rayleigh (F) sebagai representasi matematis dari laju disipasi energi mekanik akibat gesekan. Fungsi ini didefinisikan sedemikian rupa sehingga gaya non-konservatif dapat diperoleh melalui turunan parsial fungsi disipasi terhadap kecepatan tergeneralisasi, yaitu

$$Q_i^{(nc)} = - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{.....(3)}$$

Substitusi hubungan tersebut ke dalam Persamaan Euler-Lagrange menghasilkan bentuk persamaan gerak yang telah mengakomodasi pengaruh disipasi. Dengan memindahkan suku gaya

non-konservatif ke ruas kiri, diperoleh Persamaan Euler-Lagrange tergeneralisasi sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \dots\dots(4)$$

Persamaan tersebut menunjukkan bahwa pengaruh gaya gesek viskos dapat dimasukkan secara sistematis ke dalam kerangka mekanika analitis melalui fungsi disipasi Rayleigh. Formulasi ini menyatukan kontribusi energi kinetik, energi potensial, dan disipasi energi akibat viskositas ke dalam satu persamaan diferensial yang konsisten. Persamaan ini menjadi landasan teoritis untuk menurunkan gaya gesek dan persamaan gerak berbasis prinsip energi tanpa harus memulai analisis dari formulasi tensor tegangan yang relatif lebih kompleks.

Sebagian besar penelitian terkini lebih menitikberatkan pada pengembangan instrumen pengukuran viskositas berbasis kapiler, sensor mikrofluida, ataupun metode berbasis *machine learning* untuk meningkatkan akurasi pengukuran [3]-[7]. Di sisi lain, penelitian mengenai mekanika analitis umumnya berfokus pada pengembangan formulasi Lagrangian untuk sistem disipatif atau pada kajian teoritis persamaan Navier-Stokes tanpa memberikan penjabaran yang rinci mengenai penerapannya pada aliran laminar di dalam pipa kapiler [8], [9]. Dengan demikian, masih terdapat kebutuhan akan suatu formulasi analitis yang mampu menghubungkan konsep energi dalam mekanika Lagrangian dengan mekanisme disipasi viskos melalui fungsi disipasi Rayleigh sehingga menghasilkan bentuk gaya gesek dan profil kecepatan aliran Poiseuille secara sistematis. Penyusunan formulasi tersebut tidak hanya memberikan alternatif dalam proses penurunan persamaan gerak, tetapi juga memperluas pemanfaatan mekanika analitis pada permasalahan fluida yang bersifat disipatif.

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji formulasi analitis gaya gesek fluida viskos pada pipa kapiler menggunakan persamaan Euler-Lagrange yang dipadukan dengan fungsi disipasi Rayleigh. Analisis dilakukan dengan menyusun fungsi energi sistem, merumuskan fungsi disipasi yang merepresentasikan efek viskositas, kemudian mengintegrasikannya ke dalam persamaan Euler-Lagrange untuk memperoleh bentuk analitis gaya gesek dan persamaan gerak fluida. Formulasi yang diperoleh selanjutnya digunakan untuk menurunkan profil kecepatan aliran pada pipa kapiler dan dibandingkan dengan solusi aliran Poiseuille sebagai bentuk validasi teoritis. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam pengembangan kajian mekanika analitis pada sistem fluida disipatif sekaligus menyediakan kerangka teoritis yang lebih sistematis dan mudah dipahami untuk menjelaskan hubungan antara viskositas, gaya gesek, disipasi energi, dan distribusi kecepatan aliran pada pipa kapiler.

Metode

Penelitian ini menggunakan desain penelitian analitis-teoretis dengan pendekatan kuantitatif berbasis pemodelan matematis. Penelitian bertujuan untuk mengembangkan formulasi analitis gaya gesek fluida viskos pada aliran laminar di dalam pipa kapiler melalui pendekatan mekanika analitis menggunakan persamaan Euler-Lagrange yang dipadukan dengan fungsi disipasi Rayleigh. Objek kajian penelitian adalah fluida newtonian yang mengalir (*steady flow*), laminar, inkompresibel, dan berkembang penuh (*fully developed flow*) di dalam pipa kapiler berbentuk silinder dengan asumsi aliran bersifat aksisimetris sehingga kecepatan fluida hanya bergantung pada koordinat radial. Pengaruh gravitasi, turbulensi, dan efek kompresibilitas diabaikan untuk

menyederhanakan formulasi, sehingga mekanisme disipasi energi yang dianalisis *fully* berasal dari viskositas fluida.

Penelitian ini menggunakan data sekunder berupa parameter fisis dan persamaan dasar mekanika fluida yang diperoleh dari buku referensi serta artikel ilmiah bereputasi. Parameter yang digunakan meliputi viskositas dinamis fluida (μ), massa jenis fluida (ρ), jari-jari pipa kapiler (R), panjang pipa (L), gradien tekanan (dP/dz), serta distribusi kecepatan aksial fluida ($v(r)$). Selain parameter tersebut, penelitian juga memanfaatkan besaran energi yang diperlukan dalam formulasi mekanika analitis, yaitu energi kinetik, energi potensial, dan fungsi disipasi Rayleigh sebagai representasi laju disipasi energi akibat gaya gesek viskos.

Prosedur penelitian diawali dengan studi literatur mengenai mekanika analitis, persamaan Euler-Lagrange, fungsi disipasi Rayleigh, teori viskositas fluida newtonian, serta karakteristik aliran Hagen-Poiseuille pada pipa kapiler. Selanjutnya disusun model fisis aliran berdasarkan asumsi fluida Newtonian, *inkompresibel*, laminar, dan berkembang penuh di dalam pipa silinder. Berdasarkan model tersebut kemudian ditentukan fungsi Lagrangian yang merepresentasikan energi sistem serta fungsi disipasi Rayleigh yang menggambarkan kehilangan energi akibat viskositas. Kedua fungsi tersebut selanjutnya digunakan dalam Persamaan Euler-Lagrange tergeneralisasi untuk memperoleh persamaan gerak fluida secara analitis.

Persamaan diferensial yang diperoleh kemudian diselesaikan menggunakan syarat batas berupa kondisi tanpa slip (*no-slip condition*) pada dinding pipa dan kondisi simetri pada sumbu pipa. Penyelesaian tersebut menghasilkan distribusi kecepatan aliran serta formulasi analitis gaya gesek viskos pada fluida di dalam pipa kapiler. Selanjutnya, hasil yang diperoleh dibandingkan dengan solusi klasik aliran Hagen-Poiseuille sebagai bentuk validasi teoritis guna mengevaluasi konsistensi formulasi Lagrangian-Rayleigh terhadap teori mekanika fluida yang telah diterima secara luas.

Analisis data dilakukan secara analitis melalui penurunan matematis terhadap Persamaan Euler-Lagrange yang telah dipadukan dengan fungsi disipasi Rayleigh. Validasi model dilakukan dengan membandingkan profil kecepatan dan distribusi gaya gesek yang diperoleh terhadap solusi teoritis Hagen-Poiseuille, serta memverifikasi konsistensi dimensi fisika dan interpretasi setiap suku dalam persamaan. Seluruh manipulasi simbolik, penyelesaian persamaan diferensial, penyajian grafik dan visualisasi hasil dilakukan menggunakan *python*.

Hasil dan Pembahasan

1. Model Fisis Aliran Fluida dalam Pipa Kapiler

Penelitian dimulai dengan membangun bentuk model fisis aliran fluida newtonian di dalam pipa kapiler berbentuk silinder. Fluida diasumsikan inkompresibel, aliran fluida bersifat laminar dan tunak (*steady flow*), serta kondisi aliran telah berkembang penuh (*fully developed flow*). Asumsi tersebut menyebabkan tidak terdapat perubahan profil kecepatan sepanjang arah z . Aliran juga dianggap aksisimetris sehingga tidak terdapat ketergantungan terhadap koordinat sudut θ . Kondisi tersebut menunjukkan bahwa medan kecepatan fluida hanya memiliki komponen aksial dan dapat dituliskan sebagai:

$$v = v_z(r) e_z \quad \dots\dots(5)$$

Persamaan (5) menunjukkan bahwa kecepatan fluida hanya bekerja sepanjang sumbu pipa, sedangkan besar kecepatannya berubah terhadap jarak radial r . Dengan kata lain, fluida yang berada pada posisi berbeda dari pusat pipa memiliki kecepatan yang berbeda. Kondisi ini disebabkan oleh adanya interaksi viskos antara lapisan-lapisan fluida dan hambatan dari dinding pipa. Pengaruh dinding pada pusat pipa relatif kecil sehingga kecepatan cenderung maksimum, sedangkan semakin mendekati dinding, pengaruh gaya gesek semakin besar sehingga kecepatan menurun. Karena aliran hanya mempunyai komponen kecepatan aksial, maka:

$$v_r = 0, v_\theta = 0, v_z = v_z(r) \quad \text{.....(6)}$$

Kondisi pada persamaan (6) merupakan penyederhanaan yang sangat penting dalam penelitian ini. Komponen radial dan azimuth yang tidak ada menyebabkan perpindahan fluida hanya terjadi sepanjang sumbu pipa. Ketergantungan v_z terhadap r sementara tetap dipertahankan karena perubahan kecepatan pada arah radial merupakan sumber utama tegangan geser viskos.

Fluida merupakan suatu sistem kontinu, energi kinetik tidak dihitung untuk satu partikel saja, tetapi diperhitungkan pada setiap elemen volume fluida. Energi kinetik per satuan volume dapat dinyatakan sebagai:

$$T = \frac{1}{2} \rho v_z^2 \quad \text{.....(7)}$$

Simbol ρ menyatakan massa jenis fluida dalam kg/m^3 , sedangkan simbol v_z merupakan kecepatan fluida dalam arah aksial dengan satuan m/s . Besaran dinyatakan dengan T memiliki satuan J/m^3 , sehingga merepresentasikan jumlah energi kinetik yang tersimpan pada setiap satuan volume fluida. Ketergantungan kuadrat terhadap kecepatan menunjukkan bahwa perubahan kecepatan akan menghasilkan perubahan energi kinetik yang lebih besar dibandingkan perubahan kecepatannya sendiri.

$$T = \int_V \mathcal{T} dV \quad \text{.....(8)}$$

Persamaan (8) menunjukkan bahwa energi kinetik total merupakan penjumlahan kontribusi energi dari seluruh elemen volume fluida.

$$T = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{2} \rho v_z^2 r dr d\theta dz \quad \text{.....(9)}$$

Persamaan (9) menunjukan bahwa energi kinetik fluida dihitung sepanjang panjang pipa L , seluruh arah sudut dari 0 hingga 2π , dan seluruh radius dari pusat pipa $r = 0$ sampai dinding pipa $r = R$. Distribusi kecepatan $v_z(r)$ secara langsung menentukan distribusi energi kinetik dalam sistem. Perubahan energi potensial gravitasi pada penelitian ini tidak diperhitungkan karena pengaruh gravitasi terhadap arah aliran diabaikan, maka :

$$L = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{2} \rho v_z^2 r dr d\theta dz \quad \text{.....(10)}$$

Persamaan (10) menunjukan fungsi Lagrangian untuk bagian energi mekanik sistem, namun fungsi tersebut belum memuat kehilangan energi akibat viskositas. Hal tersebut disebabkan gaya gesek viskos yang merupakan gaya non-konservatif sehingga tidak dapat digambarkan

hanya melalui energi potensial. Fungsi disipasi Rayleigh diperlukan untuk memasukkan pengaruh gaya gesek ke dalam formulasi Lagrangian.

2. Hubungan Viskositas dengan Tegangan Geser

Hubungan konstitutif fluida Newtonian digunakan untuk memasukan efek viskositas. Aliran aksial didalam pipa silinder, memiliki tegangan geser antara lapisan fluida yang dinyatakan sebagai:

$$\tau_{rz} = \mu \frac{dv_z}{dr} \quad \text{.....(11)}$$

Persamaan (11) adalah bentuk hukum viskositas Newton yang menyatakan bahwa tegangan geser berbanding lurus dengan perubahan kecepatan antar lapisan fluida. Semakin besar viskositas suatu fluida, semakin besar tegangan geser yang diperlukan untuk menghasilkan gradien kecepatan tertentu. Gradien dv_z/dr secara fisis muncul karena fluida yang bersentuhan langsung dengan dinding pipa mengalami kondisi tanpa slip sehingga kecepatannya nol, sedangkan fluida di bagian tengah bergerak lebih cepat. Kecepatan yang berbeda menyebabkan lapisan fluida saling memberikan gaya gesek. Laju disipasi energi mekanik per satuan volume dapat diperoleh dari hasil kali tegangan geser dengan laju deformasi:

$$\Phi = \tau_{rz} \frac{dv_z}{dr} \quad \text{.....(12)}$$

Persamaan (12) menunjukan bahwa energi yang terdisipasi bergantung pada dua faktor, yaitu besar tegangan geser dan besar perubahan kecepatan antar lapisan fluida. Dengan mensubstitusi Persamaan (11) ke Persamaan (12), maka diperoleh

$$\Phi = \mu \left(\frac{dv_z}{dr}\right)^2 \quad \text{.....(13)}$$

Persamaan (13) adalah laju disipasi energi viskos per satuan volume. Bentuk kuadrat pada gradien kecepatan mempunyai makna penting karena menyebabkan $\Phi \geq 0$. Hal tersebut menyatakan bahwa proses viskos selalu menyebabkan energi mekanik terdisipasi dan tidak menghasilkan energi mekanik baru. Ketika gradien kecepatan bernilai nol, tidak terdapat disipasi akibat gesekan viskos namun berlaku sebaliknya jika semakin besar gradien kecepatan maka semakin besar energi mekanik yang diubah menjadi energi internal. Setengah dari laju disipasi tersebut dalam mekanika analitis, direpresentasikan melalui Fungsi Disipasi Rayleigh. Oleh karena itu, rapat Fungsi Disipasi Rayleigh ditulis sebagai:

$$F = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dv_z}{dr}\right)^2 \quad \text{.....(13)}$$

Faktor $\frac{1}{2}$ yang terdapat pada persamaan (13) merupakan bagian dari definisi fungsi Disipasi Rayleigh. Rapat Fungsi Disipasi Rayleigh adalah fungsi F perlu diperhatikan, sedangkan fungsi disipasi untuk keseluruhan sistem diperoleh dengan mengintegalkannya terhadap volume.

$$F = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \mu \left(\frac{dv_z}{dr}\right)^2 r dr d\theta dz \quad \text{.....(14)}$$

Persamaan (14) adalah bentuk fungsi disipasi Rayleigh total yang digunakan dalam penelitian. Persamaan tersebut menunjukkan bahwa energi disipatif merupakan hasil akumulasi seluruh proses gesekan yang terjadi pada setiap lapisan fluida. Faktor r menyebabkan kontribusi setiap elemen volume diperhitungkan sesuai dengan posisi radialnya. Dengan demikian formulasi ini

secara langsung mempertimbangkan karakteristik geometri pipa kapiler. Persamaan divariasikan terhadap medan kecepatan untuk menghubungkan fungsi disipasi Rayleigh dengan gaya viskos. Persamaan dapat ditulis sebagai berikut :

$$\delta F = \int_V \mu \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial(\delta \xi)}{\partial r} dV \quad \text{.....(15)}$$

Persamaan (15) terlihat bahwa perubahan kecil pada medan kecepatan memengaruhi energi disipasi. Gaya viskosnya lalu diturunkan lewat integrasi parsial terhadap koordinat radial, hingga akhirnya menghasilkan turunan fungsional setelah memperhitungkan kondisi batas.

$$\frac{\delta F}{\delta v_z} = -\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad \text{.....(16)}$$

Suku pada persamaan (16) merupakan kontribusi gaya disipatif akibat viskositas. Besarnya ditentukan oleh perubahan gradien kecepatan terhadap arah radial. Persamaan tersebut kemudian menjadi komponen utama dalam persamaan Euler-Lagrange tergeneralisasi yang digunakan untuk memperoleh persamaan gerak fluida.

3. Persamaan Euler-Lagrange Tergeneralisasi

Persamaan Euler-Lagrange untuk sistem dengan pengaruh gaya non-konservatif dapat dinyatakan melalui bentuk berikut :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{.....(17)}$$

Persamaan (17) memperlihatkan tiga kontribusi utama yang menentukan dinamika sistem. Dua suku pertama diturunkan dari formulasi Lagrangian untuk menggambarkan dinamika energi mekanik, sementara suku ketiga bersumber dari fungsi disipasi Rayleigh yang merepresentasikan gaya non-konservatif. Pada studi ini, gaya non-konservatif yang dimaksud merujuk pada gaya gesek viskos.

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad \text{.....(18)}$$

Persamaan (18) memuat persamaan momentum aksial untuk model aliran yang dikaji. Suku pertama ruas kanan menggambarkan gaya penggerak akibat gradien tekanan, sementara suku kedua menjelaskan redistribusi momentum akibat viskositas. Ruas kiri sendiri menyatakan perubahan momentum fluida terhadap waktu. Persamaan tersebut membuktikan peran Fungsi Disipasi Rayleigh dalam memasukkan efek gaya gesek viskos ke kerangka Lagrangian.

4. Kondisi Aliran Tunak

Sifat aliran tunak menyebabkan distribusi kecepatan tidak bergantung pada waktu, sehingga persamaan dinamika fluida menjadi lebih sederhana.

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad \text{.....(19)}$$

Persamaan (19) menunjukkan bahwa pada kondisi tunak terjadi keseimbangan antara gaya akibat gradien tekanan dan gaya viskos. Tidak adanya suku percepatan berarti momentum fluida yang masuk dan keluar dari suatu elemen fluida berada dalam keadaan seimbang. Oleh karena itu, tekanan yang mendorong fluida sepanjang pipa harus diimbangi oleh hambatan viskos yang

bekerja berlawanan terhadap arah aliran. Persamaan tersebut kemudian dapat disusun menjadi:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \quad \text{.....(20)}$$

Persamaan (20) merupakan persamaan diferensial yang menjadi dasar untuk menentukan kecepatan fluida. Ruas kiri menjelaskan pengaruh perubahan kecepatan secara radial, sementara ruas kanan mengukur besarnya gradien tekanan pada fluida. Hubungan kedua ruas tersebut membuktikan bahwa distribusi kecepatan lahir dari keseimbangan antara gaya pendorong tekanan dan hambatan viskos.

5. Penurunan Profil Kecepatan Poiseuille

Persamaan (20) dikalikan dengan r menghasilkan sebuah persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{r}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \quad \text{.....(21)}$$

Karena μ dan $\partial P / \partial z$ dianggap konstan, ruas kanan Persamaan (21) hanya bergantung secara linier terhadap r . Integrasi terhadap r menghasilkan:

$$r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{r^2}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial z} + C_1 \quad \text{.....(22)}$$

Konstanta integrasi C_1 ditentukan menggunakan kondisi simetri pada pusat pipa. Pada $r = 0$, kecepatan harus memiliki nilai maksimum yang terbatas dan tidak boleh menghasilkan gradien tak hingga. Kondisi tersebut mengharuskan:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{r}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \quad \text{.....(23)}$$

Persamaan (23) menunjukkan bahwa gradien kecepatan memiliki ketergantungan linier terhadap radius. Nilainya sama dengan nol pada pusat pipa dan meningkat secara proporsional terhadap r ketika bergerak menuju dinding. Hal ini menjadi dasar munculnya bentuk parabola pada profil kecepatan. Integrasi Persamaan (23) terhadap r menghasilkan:

$$v_z(r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} + C_2 \quad \text{.....(24)}$$

Penerapan kondisi tanpa slip pada dinding pipa menentukan nilai konstanta integrasi C_2 sebagai berikut:

$$v_z(r) = 0 \quad \text{.....(25)}$$

Syarat batas tersebut menetapkan kecepatan lapisan fluida sama dengan kecepatan dinding pipa pada titik kontak. Sifat dinding yang diam mengharuskan nilai kecepatan fluida pada $r = R$ sama dengan nol. Substitusi Persamaan (25) ke dalam Persamaan (24) kemudian menentukan bentuk persamaan akhir. Persamaan yang digunakan sebagai berikut:

$$C_2 = - \frac{R^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} \quad \text{.....(26)}$$

Substitusi Persamaan (26) menghasilkan bentuk profil kecepatan akhir bagi aliran fluida:

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} (R^2 - r^2) \quad \dots\dots(27)$$

Persamaan (27) membuktikan bentuk parabola pada profil kecepatan fluida terhadap radius pipa. Nilai faktor $(R^2 - r^2)$ menjadi nol (0) pada $r = R$ sehingga memenuhi syarat batas tanpa slip. Sebaliknya, posisi $r = 0$ menghasilkan nilai faktor maksimum R^2 yang menempatkan kecepatan puncak di pusat pipa. Distribusi parabola tersebut menjelaskan penurunan kecepatan fluida dari pusat menuju dinding akibat efek gesekan permukaan.

6. Kecepatan Maksimum

Kecepatan maksimum diperoleh pada pusat pipa, yaitu ketika $r = 0$. Dengan substitusikan kondisi tersebut ke dalam persamaan (27), diperoleh:

$$v_{max} = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} \quad \dots\dots(28)$$

Persamaan (28) tersebut memperlihatkan bahwa kecepatan maksimum dipengaruhi oleh tiga parameter utama, yaitu jari-jari pipa, viskositas fluida, dan gradien tekanan. Ketergantungan terhadap R^2 menunjukkan bahwa peningkatan radius memberikan pengaruh kuadrat terhadap kecepatan maksimum. Viskositas berada pada penyebut sehingga fluida dengan viskositas lebih besar akan memiliki kecepatan lebih rendah pada kondisi gradien tekanan yang sama. Tekanan yang semakin besar diberikan pada sepanjang pipa, akan menyebabkan semakin besar gaya penggerak yang tersedia untuk mengatasi gaya gesek viskos.

7. Distribusi Tegangan Geser

Distribusi tegangan geser diperoleh dengan memasukkan persamaan (23) ke dalam hukum viskositas Newton pada persamaan (12), sehingga diperoleh:

$$\tau_{rz} = \frac{r}{2} \frac{dP}{dz} \quad \dots\dots(29)$$

Persamaan (29) menunjukkan bahwa tegangan geser berubah secara linier terhadap radius. Pada pusat pipa $r = 0$, tegangan geser sama dengan nol. Hal ini terjadi karena gradien kecepatan pada pusat pipa juga bernilai nol akibat kondisi simetri. Ketika r meningkat, gradien kecepatan semakin besar sehingga tegangan geser juga meningkat. Nilai maksimum terjadi pada dinding pipa ketika $r = R$:

$$\tau_w = \frac{R}{2} \frac{dP}{dz} \quad \dots\dots(30)$$

Persamaan (30) menunjukkan bahwa dinding pipa merupakan lokasi dengan tegangan geser terbesar. Secara fisis, kondisi tersebut dapat dijelaskan karena fluida pada dinding mengalami kondisi tanpa slip, sedangkan fluida di bagian tengah bergerak dengan kecepatan yang lebih tinggi. Perbedaan kecepatan tersebut menghasilkan gradien kecepatan terbesar di dekat dinding dan pada akhirnya menghasilkan gaya gesek viskos terbesar.

7. Debit Volumetrik

Sebagai bentuk validasi tambahan, profil kecepatan pada persamaan (27) digunakan untuk menentukan debit volumetrik. Debit didefinisikan sebagai integral kecepatan terhadap luas penampang:

$$Q = 2\pi \int_0^R v_z(r) r dr \quad \text{.....(31)}$$

Substitusi Persamaan (27) menghasilkan:

$$Q = 2\pi \int_0^R \left[-\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} (R^2 - r^2) \right] r dr. \quad \text{.....(32)}$$

Hasil integrasi memberikan:

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dP}{dz} \quad \text{.....(33)}$$

Maka persamaan (33) berubah menjadi:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta P}{L} \quad \text{.....(34)}$$

Persamaan (34) merupakan bentuk hukum Hagen-Poiseuille untuk aliran laminar fluida Newtonian dalam pipa silinder. Persamaan tersebut memperlihatkan bahwa debit berbanding lurus dengan beda tekanan dan pangkat empat jari-jari pipa, tetapi berbanding terbalik dengan viskositas dan panjang pipa. Ketergantungan R^4 menunjukkan bahwa radius pipa merupakan parameter yang sangat sensitif terhadap perubahan debit. Dengan demikian, perubahan kecil pada ukuran pipa kapiler dapat menghasilkan perubahan debit yang relatif besar.

8. Hubungan Gaya Gesek dengan Disipasi Energi

Hubungan antara gaya gesek dan disipasi energi dapat diperjelas melalui daya yang hilang akibat viskositas. Daya disipasi total diperoleh dari dua kali fungsi disipasi Rayleigh:

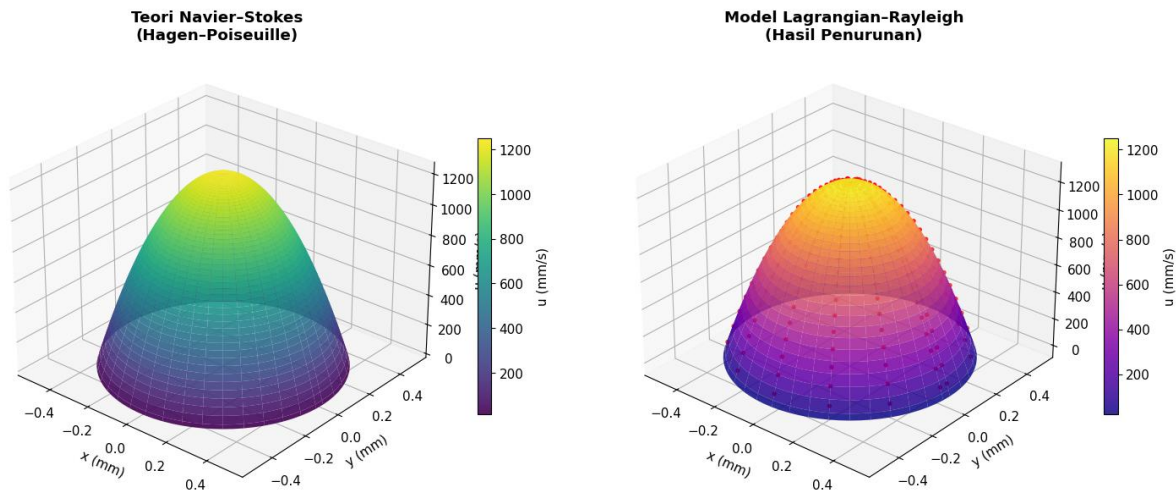
$$\dot{E}_{dis} = 2F \quad \text{.....(35)}$$

$$\dot{E}_{dis} = \int_V \mu \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^2 dV \quad \text{.....(36)}$$

Persamaan (48) menunjukkan bahwa energi mekanik yang hilang per satuan waktu meningkat ketika gradien kecepatan meningkat. Dalam konteks aliran pipa kapiler, energi yang diberikan oleh tekanan tidak seluruhnya digunakan untuk mempertahankan gerak fluida sebagai energi kinetik. Sebagian energi tersebut digunakan untuk mengatasi gesekan internal dan kemudian terdisipasi menjadi energi termal.

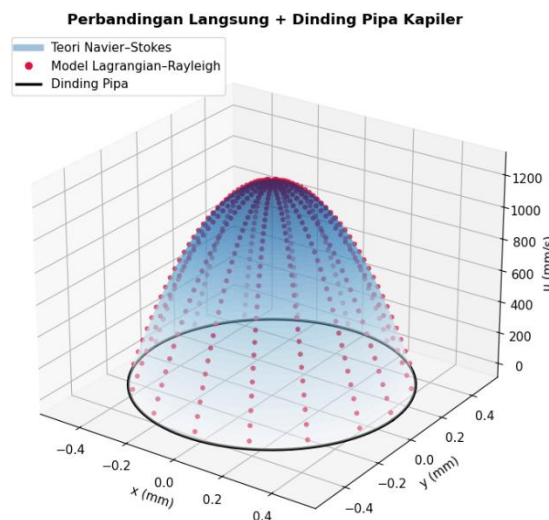
9. Validasi Teoritis Hasil Penurunan

Hasil utama penelitian berupa profil kecepatan dan debit volume menunjukkan bentuk yang sama dengan solusi Hagen-Poiseuille untuk aliran laminar fluida Newtonian dalam pipa silinder. Kesesuaian tersebut menunjukkan bahwa penambahan fungsi disipasi Rayleigh ke dalam formulasi Lagrangian mampu merepresentasikan efek viskositas secara konsisten.



Gambar 1. Hasil pemodelan teori Navier-Stokes dan model Lagrangian-Rayleigh

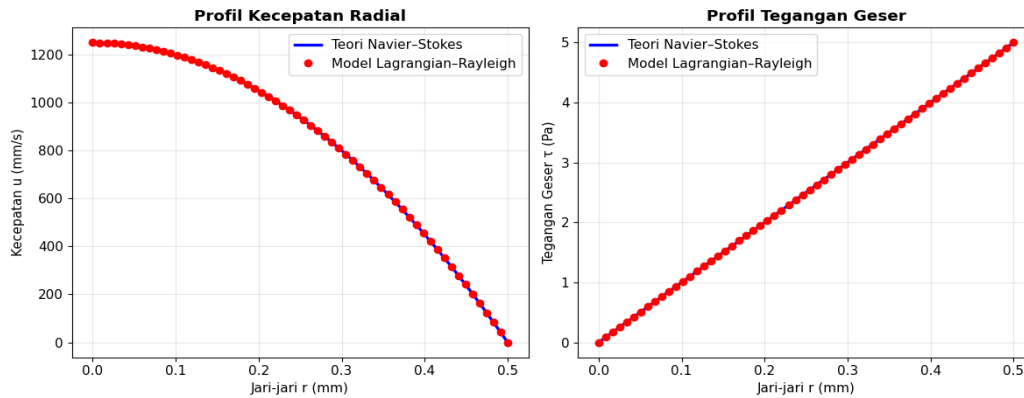
Gambar tersebut menunjukkan perbandingan profil kecepatan radial antara teori Navier-Stokes dan model Lagrangian-Rayleigh pada aliran fluida di dalam pipa kapiler. Kedua hasil menunjukkan pola yang hampir berimpit dan membentuk kurva parabola, dengan kecepatan maksimum sekitar mm/s pada pusat pipa. Kecepatan kemudian menurun secara bertahap ketika jari-jari semakin besar dan mencapai nilai mendekati nol pada dinding pipa mm). Pola tersebut menunjukkan bahwa model Lagrangian-Rayleigh mampu menghasilkan profil kecepatan yang sesuai dengan karakteristik aliran Poiseuille. Kondisi kecepatan nol pada dinding juga menunjukkan terpenuhinya kondisi *no-slip*, sedangkan kecepatan maksimum pada pusat pipa menunjukkan bahwa hambatan viskos paling kecil terjadi pada daerah tersebut.



Gambar 2. Hasil pemodelan perbandingan langsung dengan dinding pipa kapiler

Pemodelan di atas memperlihatkan distribusi kecepatan secara tiga dimensi pada penampang pipa kapiler dengan membandingkan hasil teori Navier-Stokes dan model Lagrangian-Rayleigh. Permukaan profil kecepatan menunjukkan bentuk paraboloid, dengan nilai kecepatan tertinggi pada bagian tengah penampang dan semakin rendah menuju dinding pipa. Titik-titik merah yang merepresentasikan hasil model Lagrangian-Rayleigh berada pada permukaan profil teoritis, sehingga menunjukkan kesesuaian distribusi kecepatan pada berbagai posisi radial.

Garis hitam pada bagian dasar menunjukkan batas dinding pipa dan memperlihatkan bahwa kecepatan fluida berkurang hingga mendekati nol pada permukaan tersebut. Hasil ini memperkuat bahwa model Lagrangian-Rayleigh dapat menggambarkan distribusi kecepatan pada seluruh penampang pipa, bukan hanya pada arah radial tertentu.



Gambar 3. Hasil perbandingan grafik kecepatan radial dan tegangan geser dari teori Navier-Stokes dan model Lagrangian-Rayleigh

Grafik tersebut menunjukkan distribusi tegangan geser terhadap jari-jari pipa yang diperoleh dari teori Navier-Stokes dan model Lagrangian-Rayleigh. Kedua hasil memperlihatkan pola yang hampir berimpit dan meningkat secara linier dari pusat pipa menuju dinding. Tegangan geser memiliki nilai mendekati nol pada pusat pipa dan meningkat hingga sekitar Pa pada dinding pipa mm). Pola tersebut menunjukkan bahwa tegangan geser bergantung pada gradien kecepatan radial yang dihasilkan oleh viskositas fluida. Nilai tegangan geser yang semakin besar menuju dinding menunjukkan bahwa perubahan kecepatan fluida semakin kuat pada daerah tersebut. Kesesuaian antara hasil Lagrangian-Rayleigh dan teori Navier-Stokes menunjukkan bahwa fungsi disipasi Rayleigh mampu merepresentasikan pengaruh gesekan viskos pada aliran dalam pipa kapiler.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa fungsi disipasi Rayleigh dapat digunakan untuk memasukkan pengaruh gaya gesek viskos ke dalam formulasi Lagrangian. Hasil ini sejalan dengan penelitian Szegleti dan Márkus [8] yang menunjukkan bahwa mekanisme disipasi dapat direpresentasikan dalam kerangka Lagrangian untuk sistem yang mengalami gaya non-konservatif. Penelitian ini menerapkan konsep tersebut pada fluida kontinu dengan membentuk fungsi disipasi Rayleigh berdasarkan gradien kecepatan fluida. Hasil penelitian juga sejalan dengan Bistafa [9] yang menunjukkan bahwa pendekatan Lagrangian dapat digunakan untuk memformulasikan sistem fluida viskos. Perbedaannya terletak pada fokus kajian, karena Bistafa [9] membahas formulasi variasi persamaan Navier-Stokes secara umum, sedangkan penelitian ini secara khusus menerapkan pendekatan Lagrangian-Rayleigh pada aliran simetris dalam pipa kapiler dan menghubungkannya dengan profil kecepatan Poiseuille. Dengan demikian, hasil penelitian memperkuat bahwa pendekatan berbasis energi dapat digunakan untuk menjelaskan mekanisme disipasi pada fluida viskos.

Hasil penurunan selanjutnya menghasilkan profil kecepatan berbentuk parabola, dengan kecepatan maksimum berada pada pusat pipa dan menurun menuju dinding. Karakteristik tersebut konsisten dengan teori Hagen-Poiseuille untuk aliran fluida newtonian yang mengalir secara laminar dan berkembang penuh dalam pipa silinder. Hasil penelitian ini juga memiliki

keterkaitan dengan penelitian Meffan *et al.* [4] dan Cochard-Marchewka *et al.* [6] yang menunjukkan pentingnya karakterisasi viskositas pada sistem mikrofluida dan saluran kapiler. Meffan *et al.* [4] menggunakan sistem mikrofluida berbasis rangkaian kapiler untuk mengukur viskositas, sedangkan Cochard-Marchewka *et al.* [6] menggunakan platform mikrofluida berbasis *droplet* untuk karakterisasi viskositas. Berbeda dengan kedua penelitian tersebut yang menggunakan pendekatan eksperimental, penelitian ini menggunakan pendekatan analitis untuk menjelaskan hubungan antara viskositas, gradien tekanan, distribusi kecepatan, dan gaya gesek. Oleh karena itu, hasil penelitian ini memberikan dasar teoritis yang dapat melengkapi pendekatan eksperimental pada sistem mikrofluida.

Penelitian Bakhtiaridoost *et al.* [3] dan Uno *et al.* [7] semakin memperkuat relevansi kajian viskositas pada skala mikro. Bakhtiaridoost *et al.* [3] mengembangkan perangkat mikrofluida untuk mengukur viskositas plasma darah, sedangkan Uno *et al.* [7] mengembangkan perangkat mikrofluida berbasis kain *nonwoven* untuk pengukuran viskositas dengan volume sampel yang kecil. Kedua penelitian tersebut menunjukkan bahwa karakteristik viskositas pada saluran mikro memiliki penerapan dalam teknologi pengukuran dan bidang biomedis. Penelitian ini tidak mengembangkan perangkat pengukuran, tetapi menghasilkan model teoritis yang menjelaskan mekanisme gaya gesek viskos dan disipasi energi pada aliran dalam pipa kapiler.

Kesimpulan

Penelitian ini merumuskan gaya gesek fluida viskos pada pipa kapiler menggunakan Persamaan Euler-Lagrange dengan fungsi disipasi Rayleigh. Hasil pemodelan menunjukkan profil kecepatan parabola dengan kecepatan maksimum di pusat pipa dan mendekati nol pada dinding, serta distribusi tegangan geser yang meningkat menuju dinding. Hasil tersebut konsisten dengan teori Navier-Stokes atau Hagen-Poiseuille sehingga pendekatan Lagrangian-Rayleigh dapat digunakan untuk menjelaskan gaya gesek dan disipasi energi pada aliran viskos secara berbasis energi. Penelitian ini masih terbatas pada fluida newtonian dengan aliran laminar, mantap, *inkompresibel*, dan berkembang penuh serta belum divalidasi secara eksperimental. Penelitian selanjutnya disarankan mengembangkan model pada fluida non-Newtonian dan melakukan validasi melalui data eksperimen.

Daftar Pustaka

- [1] P. Kolliopoulos and S. Kumar, "Capillary flow of liquids in open microchannels: Overview and recent advances," *npj Microgravity*, vol. 7, p. 51, 2021, doi: 10.1038/s41526-021-00180-6.
- [2] S. Wang, X. Zhang, C. Ma, S. Yan, D. Inglis, and S. Feng, "A review of capillary pressure control valves in microfluidics," *Biosensors*, vol. 11, no. 10, p. 405, 2021, doi: 10.3390/bios11100405.
- [3] S. Bakhtiaridoost, C. Musuroi, M. Volmer, and M. Florescu, "Optoelectronic microfluidic device for point-of-care blood plasma viscosity measurement," *Lab on a Chip*, vol. 24, pp. 3305-3314, 2024, doi: 10.1039/D4LC00211C.
- [4] C. Meffan, J. Menges, D. Mak, F. Dolamore, C. Fee, V. Nock, and R. C. J. Dobson, "A versatile capillary circuits microfluidic viscometer," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 359, p. 114497, 2023, doi: 10.1016/j.sna.2023.114497.

- [5] A. Mustafa, D. Haider, A. Barua, M. Tanyeri, A. Erten, and O. Yalcin, "Machine learning based microfluidic sensing device for viscosity measurements," *Sensors & Diagnostics*, vol. 2, pp. 1509-1520, 2023, doi: 10.1039/D3SD00099K.
- [6] P. Cochard-Marchewka, N. Bremond, and J. Baudry, "Droplet-based microfluidic platform for viscosity measurement over extended concentration range," *Lab on a Chip*, vol. 23, no. 9, pp. 2276-2285, 2023, doi: 10.1039/D3LC00073G.
- [7] M. O. Uno, M. Omori, and K. Sakamoto, "Nonwoven-fabric-based microfluidic devices for solution viscosity measurements," *Sensors & Diagnostics*, vol. 3, pp. 1551-1561, 2024, doi: 10.1039/D4SD00188E.
- [8] A. Szegleti and F. Márkus, "Dissipation in Lagrangian formalism," *Entropy*, vol. 22, no. 9, p. 930, 2020, doi: 10.3390/e22090930.
- [9] S. R. Bistafa, "Lagrangians for variational formulations of the Navier-Stokes equation," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 45, p. 629, 2023, doi: 10.1007/s40430-023-04527-w.